

## Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2006/2007-es tanév

kezdők I–II. kategória II. forduló

kezdők III. kategória I. forduló

## Feladatok

1. Hány olyan négyjegyű egész szám van a tízes számrendszerben, amelyben szerepel a 0 és az 1 számjegy is? (6 pont)

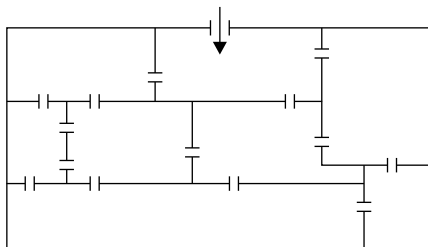
2. Melyek azok a nem negatív  $x$ ,  $y$ , és  $z$  egész számok, melyekre teljesül, hogy:

$$(x + y + z)^2 + (x + y - z)^2 + (x - y + z)^2 = 40. \quad (6 \text{ pont})$$

3. Egy szabályos ötszög kerülete 10 egység. Jelölje  $AT$  az egyik szimmetriatengelyének az ötszögbe eső szakaszát,  $h$  az  $AT$ ,  $R$  a köré írt és  $r$  a beleírt kör sugarának hosszát! Igazolja, hogy:

$$\frac{1}{h} = R - r. \quad (8 \text{ pont})$$

4. Egy királyi palota alaprajza látható az alábbi ábrán. Tíz évvel ezelőtt az ábrán feltüntetett ajtók egyikét befalazták, ezt a változtatást tehát az ábra nem tükrözi. Három éve a király minden reggel bemegy a palotába a nyíllal megjelölt bejáraton, majd úgy sétál a termek között, hogy minden ajtón pontosan egyszer menjen keresztül. Végül leül a trónteremben és fogadja látogatóit.



a) Melyik ajtót falazták be? b) Melyik terem a trónterem? (10 pont)

5. Az  $ABCD$  konvex négyszöget  $AC$  átlójával felbontjuk két háromszögre. Bizonyítsa be, hogy ha az így keletkezett  $ABC$  és  $ADC$  háromszögek beírt körei érintik egymást, akkor az  $ABD$  és  $BCD$  háromszögek beírt körei is érintik egymást. (10 pont)