Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2006/2007-es tanév
kezdők I–II. kategória II. forduló
kezdők III. kategória I. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Hány olyan négyjegyű egész szám van a tízes számrendszerben, amelyben szerepel a 0 és az 1 számjegy is? (6 pont)

Megoldás. Jelölje: $N(\overline{0})$, $N(\overline{1})$, $N(\overline{0}\,\overline{1})$ rendre azon négyjegyű számok számát, amelyben nincs 0, nincs 1, nincs 0 és 1 sem! $9 \cdot 10^3$ négyjegyű szám van, mert az első 0 nem lehet a többi 10-féle lehet. Így azon négyjegyű számok száma, amelyekben szerepel a 0 és az 1 is (pl. a logikai szita formula alapján):

$$9 \cdot 10^3 - N(\overline{0}) - N(\overline{1}) + N(\overline{0}\,\overline{1}).$$ 3 pont

$N(\overline{0}) = 9^4$, mert mind a négy számjegy 9-féle lehet. 1 pont

$N(\overline{1}) = 8 \cdot 9^3$, mert az első számjegy nem lehet 0 sem, a többi 9-féle lehet. 1 pont

$N(\overline{0}\,\overline{1}) = 8^4$, mert mind a négy számjegy 8-féle lehet. 1 pont

Tehát azon négyjegyű számok száma, amelyben nincs 0 és 1-es sem:

$$9 \cdot 10^3 - 9^4 - 8 \cdot 9^3 + 8^4 = 703.$$

2. Melyek azok a nem negatív x, y, és z egész számok, melyekre teljesül, hogy:

$$(x+y+z)^2 + (x+y-z)^2 + (x-y+z)^2 = 40.$$ (6 pont)

Megoldás. A 40 az összeadandók sorrendjétől eltekintve csak egyféleképpen írható fel három négyzetszám összegeként: $40 = 0 + 4 + 36$. 1 pont

Legyen:

$$x+y+z = 2a$$
$$x+y-z = 2b$$
$$x-y+z = 2c.$$

A második és a harmadik egyenletet összeadva: $x = b + c$.
Az első egyenletből a harmadikat kivonva: $y = a - c$.
Az első egyenletből a másodikat kivonva: $z = a - b$. 4 pont

Mivel x, y, és z nem negatív egész számok: $a \geqq b$ és $a \geqq c$.

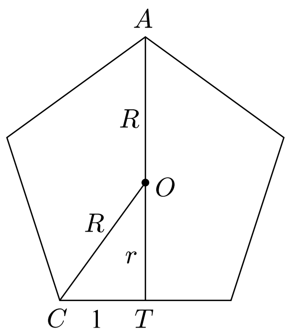
Tehát $a = 3$, $b = 1$ és $c = 0$ vagy $a = 3$, $b = 0$ és $c = 1$.

Így $x = 1$, $y = 3$ és $z = 2$ vagy $x = 1$, $y = 2$ és $z = 3$. 1 pont

3. Egy szabályos ötszög kerülete 10 egység. Jelölje AT az egyik szimmetriatengelyének az ötszögbe eső szakaszát, h az AT, R a köré írt és r a beleírt kör sugarának hosszát! Igazolja, hogy:

$$\frac{1}{h} = R - r. \qquad (8\text{ pont})$$

Megoldás.

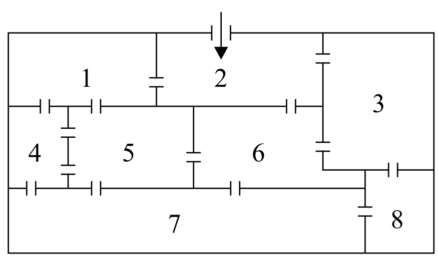


Legyen O az ötszög középpontja. Az AT hossza az AO és OT hosszának összege: $h = R + r$. Így a feladat állítása azt jelenti, hogy:

$$(R + r)(R - r) = 1, \quad \text{azaz} \quad R^2 - r^2 = 1,$$

ami az OCT derékszögű háromszögre felírt Pitagorasz-tétel, mivel a CT hossza az ötszög kerületének 10-ed része, vagyis 1. 8 pont

4. Egy királyi palota alaprajza látható az alábbi ábrán. Tíz évvel ezelőtt az ábrán feltüntetett ajtók egyikét befalazták, ezt a változtatást tehát az ábra nem tükrözi. Három éve a király minden reggel bemegy a palotába a nyíllal megjelölt bejáraton, majd úgy sétál a termek között, hogy minden ajtón pontosan egyszer menjen keresztül. Végül leül a trónteremben és fogadja látogatóit.



$a)$ Melyik ajtót falazták be? $b)$ Melyik terem a trónterem? (10 pont)

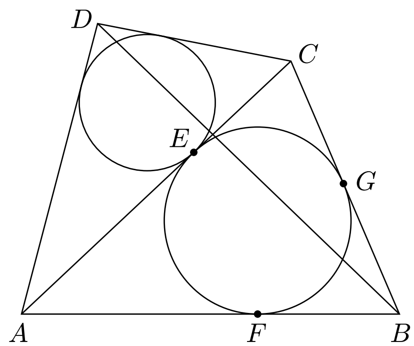
Megoldás. Ha a király valamelyik termen csak keresztül sétál, akkor annak a teremnek páros sok ajtaja van, mert minden bemenetelnek meg van a kimeneteli párja, tehát a trónteremnek páratlan számú ajtaja van. 5 pont

Az alaprajz alapján a lehetséges tróntermek: 1 (3 ajtó), 3 (3 ajtó) és 5 (5 ajtó). 2 pont

Egy ajtó befalazása két termet érint, ezért az 1–5 termek közös ajtaját befalazva mindkettő sétáló terem lesz, tehát csak a 3 számmal jelölt terem lehet a trónterem. Mivel ekkor egy lehetséges megfelelő bejárás: 2 – 1 – 4 – 5 – 4 – 7 – 5 – 6 – 7 – 8 – 3 – 6 – 2 – 3, valóban a 3 számmal jelölt terem a trónterem. 3 pont

5. Az $ABCD$ konvex négyszöget AC átlójával felbontjuk két háromszögre. Bizonyítsa be, hogy ha az így keletkezett ABC és ADC háromszögek beírt körei érintik egymást, akkor az ABD és BCD háromszögek beírt körei is érintik egymást. (10 pont)

Megoldás.



Mivel az ABC és az ADC háromszögek minden közös pontja az AC átlóra illeszkedik, beírt körük közös érintési pontja is az AC-n van. Jelöljük ezt a közös pontot E-vel. Az AB és a BC oldalak az ABC háromszögbe beírt kört az F, illetve a G pontban érintik. Egy körhöz adott külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlők, tehát $AE = AF$, $CE = CG$ és $BF = BG$. Ebből következik, hogy:

$$CB - AB = (CG + BG) - (AF + BF) = CG - AF = CE - AE.$$ 4 pont

Ugyanígy igazolható a $CD - AD = CE - AE$ összefüggés is, ahonnan

$$CB - AB = CD - AD.$$

Ezt átrendezve: $CB - CD = AB - AD$. 2 pont

A fentiekhez hasonlóan igazolható, hogy a BCD háromszög beírt köre olyan P pontban érinti a BD átlót, amelyre $BP - DP = CB - CD$, a BAD háromszög beírt köre pedig olyan Q pontban, amelyre $BQ - DQ = AB - AD$.

Így $BQ - DQ = BP - DP$, ami azt jelenti, hogy P és Q egybeesik. Tehát a BCD és BAD háromszögek beírt körei a P pontban érintik a BD átlót és egymást is. 4 pont