

1. Hány olyan pozitív egész számból álló $(x; y)$ számpár van, amelyre $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2008}$ teljesül?

Megoldás. Az egyenlet törtmentes alakja: $2008y - 2008x = xy$, ahonnan $y = \frac{2008x}{2008 - x}$. 1 pont

Mivel

$$\frac{2008x}{2008 - x} = \frac{2008(x - 2008) + 2008^2}{2008 - x} = -2008 + \frac{2008^2}{2008 - x},$$

ezért $(2008 - x)(2008 + y) = 2008^2$. 1 pont

2008 prímtényezőss felbontása: $2008 = 2^3 \cdot 251$, így a kapott egyenlet alakja:

$$(2008 - x)(2008 + y) = 2^6 \cdot 251,$$

ahol 251 prímszám. 1 pont

Mivel $0 < 2008 - x < 2008 + y < 2008^2$, ezért $2008 - x$ csak 2008^2 -nek 2008-nál kisebb pozitív osztója lehet. 2 pont

$2008 - x$ lehetséges értékei: 1, 2, 2^2 , 2^3 , 2^4 , 2^5 , 2^6 , 251, $2 \cdot 251$, $2^2 \cdot 251$. 1 pont

A kapott felbontásokból adódó $(x; y)$ számpárok mindegyike kielégíti az eredeti egyenletet, így összesen tíz megoldása van. 1 pont

Összesen: 7 pont