Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2008/2009-es tanév
első (iskolai) forduló
haladók – II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Határozzuk meg azokat az egész számokat, amelyekre az $x^2 + 32x + 2264$ polinom helyettesítési értéke egyenlő egy prímszám négyzetével!

I. megoldás. Legyen $x^2 + 32x + 2264 = p^2$.

Teljes négyzetté kiegészítéssel: $(x + 16)^2 + 2008 = p^2$. 1 pont

Ezt átrendezve, az ismert azonosság alapján a $2008 = (p+x+16)\cdot(p-x-16)$ egyenlethez jutunk. 1 pont

Tehát 2008-at kell felírnunk két egész szám szorzataként. Legyen egy ilyen lehetséges számpár $(o_1; o_2)$. Ekkor a

$$\begin{cases} p + x + 16 = o_1, \\ p - x - 16 = o_2 \end{cases}$$

egyenletrendszerhez jutunk. 1 pont

Az egyenleteket összeadva $2p = o_1 + o_2$, tehát az osztópárok összege páros és pozitív.

Ezeknek a feltételeknek a $(2; 1004)$, $(4; 502)$ számpárok tesznek eleget ($2008 = 2^3 \cdot 251$). 1 pont

Így négy egyenletrendszert írhatunk fel:

$$\begin{cases} p + x + 16 = 1004, \\ p - x - 16 = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} p + x + 16 = 2, \\ p - x - 16 = 1004; \end{cases}$$

$$\begin{cases} p + x + 16 = 502, \\ p - x - 16 = 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} p + x + 16 = 4, \\ p - x - 16 = 502. \end{cases}$$

A megoldások:

$$p = 503;\ x = 485, \quad p = 503;\ x = -517, \quad p = 253;\ x = 233, \quad p = 253;\ x = -265.$$ 2 pont

A 253 nem prím, tehát a polinom helyettesítési értéke az $x_1 = 485$ és $x_2 = -517$ egész számokra lesz egyenlő egy prímszám négyzetével. 1 pont

Összesen: 7 pont

II. megoldás. Legyen $x^2 + 32x + 2264 = p^2$.

Ez x-re másodfokú egyenlet, melynek megoldása: $x_{1;2} = -16 \pm \sqrt{p^2 - 2008}$. 1 pont

x egész szám, ha $p^2 - 2008 = z^2$, ahol z egész szám.

Az egyenletet átrendezve a $(p + z) \cdot (p - z) = 2008$ egyenlethez jutunk. 1 pont

A megoldás innentől kezdve megegyezik az előzővel, a pontszámok ennek megfelelően adhatók.

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Természetesen teljes értékű megoldásnak kell elfogadni, ha a vizsgázó a paritás és az előjel vizsgálata helyett 2008 összes osztópárját megadva megoldja az egyenletrendszereket és kiszűri a helyes megoldásokat. Ebben az esetben, ha valamelyik osztópár hiányzik, a feladat megoldására legfeljebb 4 pontot kaphat.

2. Tekintsük az $1+2+3+4+\ldots+2008$ összeget! Az összeg tetszőleges számú „+” előjelét „$-$”-ra változtathatjuk.

$a)$ Bizonyítsuk be, hogy az előjelváltásokkal elérhető a 2008 értékű összeg.

$b)$ Igazoljuk, hogy a 2009 értékű összeg nem állítható elő előjelváltásokkal.

Megoldás. $a)$ Első lépésben ezt mutatjuk meg, hogy a 0 értékű összeg megvalósítható. Például a következő előjelváltási szisztéma célunknak megfelelő:

$$(1-2+3-4+5-6+7-\ldots-1004)+(-1005+1006-1007+\ldots+2006-2007+2008).$$

A felírt összeg első 1004 tagjának összege -502, mert számpáronként (-1)-et adunk össze 502-szer. 1 pont

Hasonlóan a második 1004 db tag összege 502. 1 pont

Ha most az imént felírt összegben a -1004 előjelét pluszra változtatjuk, akkor a felírt 0 értékű összeg 2008-cal nő, azaz 2008 lesz. 2 pont

$b)$ Egyetlen előjelváltás páros számmal változtatja meg a mindenkori összeget, hiszen ha az S értékű összegben az előjeles x szám előjelét megváltoztathatjuk, akkor az új összeg értéke $S - 2x$ lesz. 1 pont

Mivel az eredeti összeg értéke páros szám $(2009 \cdot 1004)$, 1 pont
ezért bármely előállítható összeg csak páros lehet, tehát 2009 nem. 1 pont

---

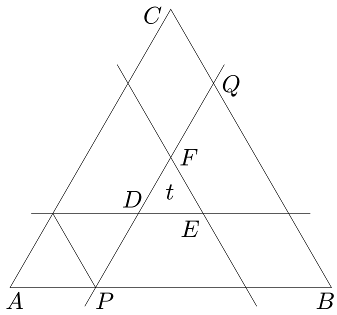
Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Az $a)$ rész esetében bármely helyes konstrukció megadása és annak igazolása 4 pont értékű.

3. A T területű szabályos háromszög oldalaival párhuzamos egyenesek felezik a háromszög területét. A három egyenes által közrefogott háromszög területe t. Melyik két szomszédos egész szám közé esik $\dfrac{T}{t}$ értéke?

Megoldás.

Tekintsük a következő ábrát:



Az $AB = BC = CA = a$ jelöléssel $T = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. 1 pont

Feltételeink alapján például a PBQ háromszög területére $T_{PBQ} = \dfrac{T}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8} = \dfrac{PB^2}{4}\sqrt{3}$ teljesül.

Innen pedig $PB = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. 1 pont

A szimmetria miatt

$$DE = PB - 2 \cdot (a - PB) = 3PB - 2a = \frac{3a}{\sqrt{2}} - 2a = \frac{a \cdot \left(3 - 2\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}.$$ 1 pont

A DEF szabályos háromszög oldala tehát $\dfrac{a \cdot \left(3 - 2\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}$, ezért t területe:

$$t = \frac{a^2 \cdot \left(17 - 12\sqrt{2}\right)}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \cdot \left(17 - 12\sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{3}}{8}.$$ 1 pont

Eredményünk alapján

$$\frac{T}{t} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{8}{a^2 \cdot \left(17 - 12\sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{17 - 12\sqrt{2}} = 2\left(17 + 12\sqrt{2}\right) =$$

$$= 34 + 24\sqrt{2} = 34 + \sqrt{1152}.$$ 1 pont

Mivel $34^2 = 1156$ és $33^2 = 1089$, ezért $33 < \sqrt{1152} < 34$, 1 pont

ezért $67 < \dfrac{T}{t} < 68$. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Azt mondjuk, hogy egy sorozat *Fibonacci-típusú,* ha tagjai pozitív egészek és a harmadik tagtól kezdve minden eleme az előző kettő összege. Például $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$, vagy $3, 1, 4, 5, 9, 14, \ldots$.

Hány olyan Fibonacci-típusú sorozat van, amelynek 8. eleme 2008?

Megoldás. A sorozatot egyértelműen meghatározza az első két elem értéke, ezért azt kell vizsgálnunk, hogy mi lehet ez a két elem. 2 pont

Jelölje a sorozat első elemét x, a másodikat pedig y, továbbá a sorozat n. tagját a_n. A képzési szabály szerint számolva kifejezhetjük a sorozat első 8 elemét x és y segítségével:

$$a_1 = x, \qquad a_2 = y, \qquad a_3 = x + y, \qquad a_4 = x + 2y,$$

$$a_5 = 2x + 3y, \qquad a_6 = 3x + 5y, \qquad a_7 = 5x + 8y, \qquad a_8 = 8x + 13y.$$

Tehát a $8x + 13y = 2008$ egyenletet kell megoldanunk a pozitív egészek halmazán. 2 pont

Mivel $8x$ és 2008 osztható 8-cal, ezért $13y$ is, amiből $y = 8z$ valamilyen z pozitív egészre, hiszen 13 és 8 relatív prímek. Az egyenlet 8-cal leosztva: $x + 13z = 251$. 1 pont

Innen $x = 251 - 13z$, ami $z = 1, 2, 3, \ldots, 19$ esetén ad pozitív egész x értéket. Ezek mind jó megoldásra vezetnek, tehát 19 különböző Fibonacci-típusú sorozat létezik, aminek 8. eleme a 2008. 2 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Az alábbi táblázatban megadtuk a megfelelő sorozatokat:

z	$x = a_1$	$y = a_2$	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	238	8	246	254	500	754	1254	2008
2	225	16	241	257	498	755	1253	2008
3	212	24	236	260	496	756	1252	2008
4	199	32	231	263	494	757	1251	2008
5	186	40	226	266	492	758	1250	2008
6	173	48	221	269	490	759	1249	2008
7	160	56	216	272	488	760	1248	2008
8	147	64	211	275	486	761	1247	2008
9	134	72	206	278	484	762	1246	2008
10	121	80	201	281	482	763	1245	2008
11	108	88	196	284	480	764	1244	2008
12	95	96	191	287	478	765	1243	2008
13	82	104	186	290	476	766	1242	2008
14	69	112	181	293	474	767	1241	2008
15	56	120	176	296	472	768	1240	2008
16	43	128	171	299	470	769	1239	2008
17	30	136	166	302	468	770	1238	2008
18	17	144	161	305	466	771	1237	2008
19	4	152	156	308	464	772	1236	2008

5. Tudjuk, hogy

$$\sqrt{44-8}=6,$$
$$\sqrt{4444-88}=66,$$
$$\sqrt{444\,444-888}=666.$$

Ha n pozitív egész szám, akkor bizonyítsuk be, hogy az $A=\sqrt{\underbrace{444\ldots4}_{2n\text{-szer}}-\underbrace{888\ldots8}_{n\text{-szer}}}$ szám természetes szám!

Megoldás.

$$\underbrace{444\ldots4}_{2n\text{-szer}}-\underbrace{888\ldots8}_{n\text{-szer}}=\underbrace{444\ldots4}_{n\text{-szer}}\cdot10^n+\underbrace{444\ldots4}_{n\text{-szer}}-\underbrace{888\ldots8}_{n\text{-szer}}.$$ 2 pont

Jelölje: x az $\underbrace{111\ldots1}_{n\text{-szer}}$ számot! 1 pont

Ekkor

$$\underbrace{444\ldots4}_{2n\text{-szer}}-\underbrace{888\ldots8}_{n\text{-szer}}=4x\cdot10^n+4x-8x=4x\cdot10^n-4x=4x\cdot(10^n-1)=$$
$$=4x\cdot\underbrace{999\ldots9}_{n\text{-szer}}=4x\cdot9x=36x^2.$$ 3 pont

Így $A=\sqrt{36x^2}=\sqrt{36\cdot\underbrace{111\ldots1}_{n\text{-szer}}{}^2}=\underbrace{666\ldots6}_{n\text{-szer}}$, ami valóban pozitív egész, tetszőleges pozitív egész n esetén. 1 pont

---

Összesen: 7 pont