Országos Közoktatási Értékelési
és Vizsgaközpont

Bolyai János Matematikai Társulat

T

2004. évi ARANY DÁNIEL matematikai tanulóverseny
KEZDŐK I-II-III. kategória
I. forduló

1. Oldja meg az $x - \operatorname{sgn}(x+1) = 1 - \sqrt{2}$ egyenletet, ahol $\operatorname{sgn}(x)$ az előjelfüggvény, amelynek értéke:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 \text{ ha } x < 0, \\ 0 \text{ ha } x = 0, \\ 1 \text{ ha } 0 < x. \end{cases}$$

(6 pont)

2. A $9+99+999+...+\underbrace{999...9}_{2004\, db\ 9}$ összegben hány 1-es számjegy fordul elő? (6 pont)

3. Az $ABCD$ rombuszt, ahol $DAB\angle = 60^\circ$, az átlók metszéspontja körül elforgatjuk 90°-kal. Így kapjuk az $A'B'C'D'$ rombuszt. Határozza meg a két rombusz közös részének területét, ha a rombusz oldalhossza a egység! (8 pont)

4. Oldja meg a következő egyenletrendszert, ahol a, b és c nemnegatív egész számok:

I. $a + 2 \cdot b + b^2 + c = 19$

II. $a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c = 15$

(10 pont)

5. Az ABC háromszögben az A csúcsból induló szögfelező a szemközti oldalt D pontban, a C-ből induló szögfelező a szemközti oldalt E pontban metszi. A szögfelezők metszéspontját jelöljük M-mel! Mekkorák az ABC háromszög szögei, ha $AB = AD$ és $BM = BE$? (10 pont)

Országos Közoktatási,
Értékelési és Vizsgaközpont

Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2003–2004-es tanév
második forduló
haladók – I. kategória

Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű háromszög súlyvonalaiból – mint oldalakból – derékszögű háromszög szerkeszthető, akkor ez a háromszög hasonló az eredetihez.

2. Egy 4000 cm^2 területű téglalapban adott 2004 darab pont. Mutassuk meg, hogy ezek között van három olyan, amelyek által meghatározott háromszög területe 2 cm^2-nél kisebb.

3. Egy derékszögű háromszög területe 2004 területegység. Lehet-e a háromszög mindhárom oldalának hossza egész szám értékű?

4. Oldjuk meg a $\sqrt{2p-x}-\sqrt{x-p}=p-2$ egyenletet, ahol a p paraméter értéke egész szám.

Országos Közoktatási,
Értékelési és Vizsgaközpont

Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2003–2004-es tanév
második forduló
haladók – II. kategória

Feladatok

1. Az ABC derékszögű háromszög átfogója 6 egység hosszú. Az AC befogó C csúcshoz közelebbi harmadolópontja D, a BC befogó B csúcshoz közelebbi harmadolópontja pedig E. Ha az A, B, E, D pontok egy körön vannak, akkor mekkora a négyszög köré írható kör sugara?

2. Oldjuk meg a $\sqrt{2p-x}-\sqrt{x-p}=p-2$ egyenletet, ahol a p paraméter értéke egész szám.

3. Az ABC háromszög A csúcsánál 60°-os szög van. Legyen BCE és ACF a BC, illetve AC oldal fölé kifelé rajzolt szabályos háromszög. Legyen továbbá D az AC oldalnak az a pontja, amelyre az ABD háromszög szabályos. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a $CEDF$ négyszög paralelogramma.

4. Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=u^2+1\\ xy+yz+zx&=u\\ x+y&=u-1 \end{aligned}\right\}$$

Országos Közoktatási,
Értékelési és Vizsgaközpont

Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2003–2004-es tanév

első (iskolai) forduló

haladók – III. kategória
(speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók)

Feladatok

1. Mely p és q pozitív prímszámra és n egész számra teljesül az $n^2 = p^2 + q^2 + p^2q^2$ összefüggés?

2. Az ABC háromszög síkjának tetszőleges P pontjából a háromszög magasságvonalaira állított merőlegesek talppontja X, Y és Z. Bizonyítsuk be, hogy az XYZ háromszög hasonló az ABC háromszöghöz.

3. Az x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 nemnegatív számok összege 5. Határozzuk meg az

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5$$

összeg maximumát!

4. Az 1-es és 5-ös számjegyek felhasználásával hány különböző 15-tel osztható 15-jegyű pozitív egész szám állítható elő, ha két 5-ös nem lehet szomszédos?