

Egyenletek, egyenlőtlenségek, paraméteres egyenletek

1. Oldd meg az alábbi egyenleteket!

a) $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{1-x} = \frac{4}{x^2-1} + 1$

b) $|3x-2| = 2-3x$

c) $|1-2x| = 3x+2$

d) $\sqrt{x-3} - \sqrt{1-x} = 11$

e) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = -4$

2. Oldd meg az alábbi egyenleteket!

a) $2|x| - |x+1| = 2$

b) $|x-2| + |2x-7| = 3$

c) $|x+1| + |x-3| = 8$

d) $|2-x| + |3-x| = 10$

e) $|x+3| + |x-1| = 3x-5$

f) $2x^2 - 5x - 3|x-2| = 0$

g) $|x^2 + 2x - 3| = -4x$

3. Oldd meg a következő egyenleteket!

a) $\sqrt{5x-4} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x+1}$

b) $|x+3| + |x-1| = 3x-5$

4. Oldd meg az egyenlőtlenséget, és a megoldást ábrázold számegegyenesen!

$$\frac{3x-2}{2} + \frac{1}{2} \geq \frac{1+4x}{3} - \frac{1}{2}$$

5. Oldd meg az egyenlőtlenséget, és a megoldást ábrázold számegegyenesen!

$$\frac{5x-2}{3} - \frac{1-3x}{4} < \frac{9x+4}{2}$$

6. Add meg a következő egyenlőtlenség grafikus megoldásait!

$$|x-1| < 2$$

7. Add meg a következő egyenlőtlenség grafikus megoldásait!

$$|3-2x| \leq 3$$

8. Add meg a következő egyenlőtlenség grafikus megoldásait!

$$\left| \frac{x}{2} + 2 \right| \leq 3$$

9. Add meg a következő egyenlőtlenség megoldásait, és a megoldást ábrázold számegegyenesen!

$$\frac{|x-3|}{x-3} > 0$$

10. Add meg a következő egyenlőtlenség megoldásait!

$$\left| \frac{2}{x-4} \right| > 1$$

11. *Add meg a következő egyenlőtlenség megoldásait!

$$\frac{|x-1|}{x+2} < 1$$

12. Add meg a következő egyenlőtlenség megoldásait, és ábrázold számegegyenesen!

$$|x-2| < \frac{x-1}{2}$$

13. Add meg a következő egyenlőtlenség megoldásait, és ábrázold számegegyenesen!

$$2|x+1| > x+4$$

14. Add meg a következő egyenlőtlenség megoldásait, és ábrázold számegegyenesen!

$$|x-1| + |2-x| > 3+x$$

15. Grafikusan oldd meg az egyenlőtlenségeket!

a) $(x-3)(x+5) > 0$

b) $(x+2)(x-1) \leq 0$

16. Oldd meg az egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

a) $x^2 - 2x - 3 > 0$

b) $x^2 + 2x + 3 \geq 0$

17. Oldd meg az egyenlőtlenséget, és a megoldás ábrázold számegegyenesen!

a) $-x^2 - 6x + 27 \leq 0$

b) $2x^2 - 4x + 13 > 0$

18. Oldd meg az egyenlőtlenségeket, és a megoldás ábrázold számegegyenesen!

a) $\frac{3x-5}{x-5} < 0$

c) $\frac{3x-5}{x} \leq 2$

b) $\frac{2x}{x-4} \leq 2$

d) $\frac{3x-8}{5-x} > 1$

19. Oldd meg az egyenlőtlenséget, a megoldást ábrázold számegegyenesen!

a) $\frac{x-3}{x^2-8x+16} > 0$

b) $\frac{2x-1}{x^2+3x-4} < \frac{1}{2}$

c) $\frac{x^2-7x+10}{x^3+x^2-2x} < 0$

20. Oldd meg az egyenlőtlenséget az egész számok halmazán!

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 6x + 5} < 0$$

21. Oldd meg az egyenlőtlenségeket, és a megoldás ábrázold számegegyenesen!

a) $\sqrt{x} > -1$

c) $\sqrt{x^2} < x+1$

e) $\sqrt{x+1} > 1-x$

b) $\sqrt{2x-5} > 7$

d) $2\sqrt{x-1} < x$

f) $\sqrt{x+12} < x$

22. Oldd meg az egyenlőtlenségeket az egész számok halmazán!

a) $\sqrt{-x^2 + 4x - 3} < x - 2$

b) $x + \sqrt{2 - x} > 0$

23. Határozd meg az egyenlőtlenség valós megoldásait!

a) $\sqrt{x^2 - 4x} \geq x - 4$

e) $\sqrt{3x + 1} > \sqrt{2 - x}$

b) $\sqrt{x^2 + 4x} > 2 - x$

f) $\sqrt{2x + 1} > \sqrt{3 - x}$

c) $\sqrt{x^2 - 1} \geq 5 - x$

d) $\sqrt{x^2 - 3x - 10} \geq 8 - x$

24. Határozd meg az egyenlőtlenség megoldását, és ábrázold számegegyenesen!

$$\sqrt{x^2 - x - 12} < x$$

25. Add meg az egyenlőtlenség valós megoldásait, és ábrázold számegegyenesen!

$$|2x - 3| - |3x + 7| > 0$$

26. Oldd meg az egyenlőtlenséget és a megoldáshalmazt ábrázold számegegyenesen!

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x + 8} > 0$$

27. Határozd meg a p valós paramétert úgy, hogy az $x^2 + px + 3 = 0$ egyenletben a gyökök különbsége 2 legyen!28. Határozd meg azokat a valós p értékeket, amelyekre a $(p - 3)x^2 - 2px + 6p = 0$ egyenlet gyökei pozitív valós számok!

29. Oldd meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a.
$$\frac{3x}{4x^2 - 1} - \frac{2}{1 - 2x} = -1$$

b.
$$\sqrt{x+6} + \sqrt{x+1} = \sqrt{7x+4}$$

c.
$$|2 - 3x| - |2x + 5| = x - 1$$

30. Új ismeretlen bevezetésével oldd meg az alábbi egyenletet!

$$x^2 + \sqrt{x^2 - 9} = 21$$

Függvények

1. Ábrázold a függvényeket, és jellemezd a tanult szempontok szerint!

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 2x^2 - 4x - 4$$

$$g(x) = \frac{x-3}{x-2}$$

$$h(x) = 2 - \sqrt{x+3}$$

$$i :]-2; 8] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} -(x+1)^2 + 3, & \text{ha } x \leq 2 \\ -2|x-6| + 2, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

2. Add meg egy olyan másodfokú függvény hozzárendelési szabályát, melynek maximuma az $x_m = 3$ helyen 2, és egyik zérushelye az $x_0 = 4$!
3. Ábrázold a függvényeket, és jellemezd a tanult szempontok szerint!

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto |x^2 - 4x + 2| - 2$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto |x+3| + |x-1|$$

Add meg a függvény hozzárendelési szabályát abszolút értékek használata nélkül!

4. A p paraméter mely értékei mellett lesznek az $f(x) = (4-p)x^2 + (2p+2)x - (7p+2)$ függvény értékei csak negatív számok?
5. Add meg a $|x+2| - |x-2| = p$ egyenlet megoldásainak számát a p paraméter függvényében! Dolgozz grafikusán!
- 6.

Hatvány, gyök, exponenciális, logaritmusos

7. Végezd el a következő műveleteket! Az eredményt írd fel gyökös és hatványalakban is, ahol lehet!

$$a) \left(\sqrt[3]{2x} - \sqrt[3]{3y} \right) \left(\sqrt[3]{4x^2} + \sqrt[3]{6xy} + \sqrt[3]{9y^2} \right) =$$

$$b) \sqrt[5]{a^2 \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a^3}} =$$

$$c) \frac{\sqrt[2]{x^{-3}} \cdot x^{\frac{5}{4}} \cdot \frac{1}{x^2}}{x^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{x^3} \cdot x^3} =$$

8. Ábrázold és jellemezd az alábbi függvényeket!

$$a) x \mapsto 2^x$$

$$b) x \mapsto \left(\frac{1}{2} \right)^x$$

$$c) x \mapsto \log_2 x$$

$$d) x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x$$

9. Ábrázold és jellemezd az alábbi függvényeket!

$$a) f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x+4)$$

$$b) g(x) = 2 + \log_2(x-1)$$

10. Mennyi idő alatt fogja egy 200000 Ft-os befektetés megháromszorozni az értékét, ha az éves kamat 12% és a kamatot negyedévenként írják jóvá?

11. Egy baktériumpopuláció három hetenként megduplázódik. Ha a populáció mérete most N° , mekkora lesz 6 hét, 15 hét, illetve h hét múlva?

12. A 2500000 Ft-os autó értéke évente 20%-kal csökken. Számítsuk ki az értékét 1 év, 2 év, 3 év, illetve 10 év múlva!

13. A radioaktív kormeghatározásnál használt C-14 - es szénizotóp felezési ideje 5730 év. Mennyi marad egy 10 milligrammos mintából 4500 év elteltével?

14. Egy élesztőgomba-tenyészet 20 percenként duplájára nő. Hányszorosára nő 1 óra, 12 óra, illetve 1 nap alatt?

15. Az uránium-kitermelés egyik mellékterméke a plutónium, amelynek felezési ideje kb. 25000 év. Ha adott mennyiségű plutóniumot betonköpenyben tárolnak, mekkora része marad meg 100 év elteltével? És 1 millió év múlva?

16. Egy arany pénzérme értéke 20000 Ft-ról 47600 Ft-ra növekedett 8 év alatt. Számítsuk ki az átlagos évi értéknövekedést százalékban kifejezve!

17. Egy újonnan 2400000 Ft-os autó értéke 5 év alatt 800000 Ft-ra csökkent. Átlagosan hány százalékkal csökkent az értéke évente?

18. Melyik befektetés a jövedelmezőbb: 200000 Ft-os betét, 8%-os évi kamattal, 10 év múlva, vagy 400000 Ft-os betét, 8%-os kamattal, 5 év múlva?

19. Nagy-Britanniában a népszámlálási adatok szerint 1951-ben $5,0225 \times 10^7$ -en, 1971-ben pedig $5,5615 \times 10^7$ -en.

a) Évente átlagosan hány %-kal emelkedett a népességszám az említett 20 évben?

- b) Hányan voltak a britek 1956-ban, 1961-ben, illetve ilyen növekedés mellett vajon hányan lettek volna 1998-ban?
20. Az infláció átlagos éves értéke 15%. Ilyen inflációnál, ha jelenleg 100Ft egy kg kenyér, mennyibe fog kerülni 3 év múlva? Mikor lesz 200Ft az ára?
21. Egy régészek által talált fa mintában a C-14 izotóp mennyisége csak 45%-a a hasonló széntartalmú élő fákból található mennyiségnek. Megközelítőleg hány év telt el azóta, hogy ez a fa minta egy élő fa része volt? (A választ csak 100 év pontossággal adjuk meg)
22. Egy tudós csontleletében a C-14 izotóp és a C-12 izotóp aránya $0,08:10^{12}$.
- a) Számítsuk ki a mostani csontleletben és a leletet valaha tartalmazó élőlény csontjában levő C-14 izotóp tartalom arányát!
- b) Megközelítőleg hány év telt el az élőlény elpusztulása óta?
23. Sopronban fészkelő sarlósfecske-populáció költésbiológiájának feltárása során a fiókák kikelésétől a kirepülésig tartó időszakban tanulmányozták a növekedés folyamatát. A tapasztalatok alapján a növekedési folyamatot a mérések alapján felállított tapasztalati függvény írja le: $W = 55 \cdot e^x$, ahol $x = -e^{-0,163(t-8)}$ t a fióka életkora napokban, és W a fióka grammban mért tömege.
- a) Várhatóan hány gramm lesz egy fióka tömege 20 napos korában?
- b) Hány %-kal gyarapodik a fióka tömege a 10. és a 20. nap között?
24. Ábrázold és jellemezd a tanult szempontok szerint az $f : x \mapsto \left| \left(\frac{1}{2} \right)^{x-1} - 1 \right|$ függvényt!
25. Oldd meg a következő egyenleteket!
- a) $\sqrt{2^{2x+3}} \cdot \sqrt[3]{8^{x+2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{8x+2}$
- b) $3 \cdot 8^{x+1} + 2 \cdot 64^{\frac{x+2}{2}} - 15 \cdot 2^{3x-1} = 144,5$
- c) $4^{x+1} + 11 \cdot 2^x = 5 - 2^{x+3}$
26. Oldd meg az alábbi egyenlőtlenséget!
- $$\left(\frac{1}{2} \right)^{x^2-8x+18} < \frac{1}{8}$$
27. Add meg a következő egyenletrendszer megoldását!
- $$\begin{cases} 2 \cdot 5^{x+1} - 2^{y+1} = -6 \\ 3 \cdot 5^{x+2} + 2 \cdot 2^{y-1} = 19 \end{cases}$$
28. Számítsa ki a következő kifejezések pontos értékét, ha $a = 9$ vagy $b = 6$!
- | | |
|---|---|
| $5^2 \cdot 5^{\log_{25} 36-1}$ | $a^{2-\log_a 27}$ |
| $5^{1+\log_{25} a}$ | $4^{3-\log_2 b}$ |
| $\sqrt{10^{4+\lg 25}}$ | $\sqrt[3]{10^{3+\lg 27}}$ |
| $\sqrt{7}(23^{\log_{29} 7} + 2^{1+\log_4 7})$ | $3^{2+\log_3 25} + 25^{1-\log_5 2} + 10^{-\lg 4}$ |

$$17^{1+\frac{1}{2}\log_7 25}$$

$$a^{\frac{\lg(\lg a)}{\lg a}}$$

29. Számítsa ki $\lg 8$ értékét $\lg 5 = 0,699$ ismeretében!

30. Fejezze ki a segítségével $\log_6 27$ -et, ha tudja, hogy $\log_6 2 = a$!

31. Tudjuk, hogy $\log_6 5 = p$. Fejezze ki p segítségével $\log_6 \sqrt{150}$ -et!

32. Fejezze ki k segítségével $\log_6 54$ -et, ha tudjuk, hogy $\log_6 18 = k$!

33. Számítsa ki a következő kifejezések pontos értékét!

a) $3\lg 15 + 2\lg 2 + \lg 14 - \lg 21 - \lg 9$

b) $\log_5 15 + \log_5 35 - \log_5 21$

c) $3\log_3 6 + \log_3 35 - \log_3 20 - \log_3 42$

d) $\lg 33 - \frac{1}{2}\lg 44\lg 15 - \lg \sqrt{1100}$

e) $\lg \sqrt{52} + 3\lg 2 + \lg 125 + \lg \sqrt{325} - \lg 13$

f) $\frac{1}{2}\log_3 45 + \log_3 \sqrt{20} - \log_3 30 + \log_3 6 - \log_3 2$

g) $1 + \frac{1}{2}\log_5 175 + \log_5 15 + \log_5 \sqrt{28} - \log_5 42$

34. Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\lg x = 1 - \lg 2$

b) $\lg x = 3 - \lg 5$

c) $\lg 2x = 2 + \lg 2$

d) $\lg 3x = \lg 81 - \lg 3$

e) $\lg \frac{x}{2} = 2 - \lg 25$

f) $\lg(x - 0,99) = \frac{\lg 100}{\lg 0,1}$

35. Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\frac{\lg(x-100)}{1-\lg 5} = 2$

b) $\frac{\lg(3x-1)}{\lg(2x+3)} = 1$

c) $\frac{\lg(2x-1)}{\lg(x-2)} = 1$

d) $\frac{\lg(2x+5)}{\lg(x+4)} = 1$

e) $\frac{\lg(x+1)}{\lg x} = 2$

f) $\frac{\lg 2x}{\lg(4x-15)} = 2$

g) $\frac{\lg(8-x^3)}{\lg(2-x)} = 3$

h) $\frac{2\lg(3x-2)}{\lg(3x^2+6x+28)} = 1$

36. Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\lg(x-13) - \lg(x-3) = 1 - \lg 2$

b) $\lg(7x+6) = 1 + \lg(3x-4)$

c) $\lg(x+1) + \lg(x-1) = \lg 8 + \lg(x-2)$

d) $4 - \lg x = 3\sqrt{\lg x}$

e) $\lg(x-9) + 2\lg \sqrt{2x-1} = 2$

f) $\lg \sqrt{3x-2} + \lg \sqrt{4x-7} = \lg 2$

g) $\lg \sqrt{x-5} + \lg \sqrt{2x-2} + 1 = \lg 30$

h) $\lg \sqrt{3x-5} + \lg \sqrt{7x-3} = 1 + \lg \sqrt{0,11}$

i) $\lg(x+11) - \lg(2x-3) = 0,4771$

j) $\lg(x^2 - 5x - 9) - \lg(2x-1) = 0$

k) $2\lg(2x-1) = \lg(3x+1)$

l) $2\lg(2x+1) = \lg(x+11)$

m) $\lg(4,5-x) = \lg 4,5 - \lg x$

n) $\frac{1}{2}\lg(x^2 - 3x) - \lg \sqrt{3-x} =$

o) $\lg(x+3) + \lg(x-3) = \lg(x+9)$

p) $\lg 5x + \lg(x-1) = 1$

q) $\lg 2x + \lg(5x-15) = 2$

r) $\frac{1}{2} \lg(2x-1) - 1 = \lg 0,3$

Sorozatok

1. Írd fel az alábbi sorozatok első három elemét!

$$a_n = 2 + 3^n$$

$$b_n = 5 - 4n$$

Milyen tulajdonágú az a (a_n) illetve a (b_n) sorozat?

2. Adj meg olyan sorozatot, ami

a) monoton növvő

b) korlátos

c) monoton csökkenő és alulról korlátos

d) nem korlátos!

3. Írd fel a sorozat további 3 elemét!

$$a_1 = 2 \quad a_2 = 5 \quad a_3 = 8 \quad a_4 = 11 \quad a_5 = 14, \dots$$

Mekkora az a_{12} értéke!

Add meg a sorozat képzési szabályát rekurzív módon vagy/és képlettel!

Elem-e a fenti sorozatnak 222 illetve 647, ha igen, akkor hányadik?

4. Igaz vagy hamis? Indokold!

a) $a_n = \frac{n^2 - 9}{n + 3}$ sorozat minden eleme pozitív szám

b) $b_n = 10^n$ sorozatnak a 30000 eleme

5. Mennyi annak a mértani sorozatnak a hányadosa, amelynek harmadik tagja 5, hatodik tagja pedig 40?

6. Egy számtani sorozat első eleme 8, differenciája $-\frac{2}{3}$. Mekkora a sorozat negyedik eleme?

7. Egy mértani sorozat első tagja 3, hányadosa (-2) . Adja meg a sorozat első hat tagjának összegét!

8. Péter lekötött egy bankban 150 000 forintot 10 évre, évi 4%-os kamatra. Mennyi pénzt vehet fel 10 év elteltével, ha közben nem változtatott a bank a lekötésen?

9. Egy sejtenyészetben 2 naponta kétszereződik meg a sejtek száma. Az első nap kezdetén 5000 sejtől állt a tenyészet. Hány sejt lesz a tenyészetben 8 nap elteltével? Számításait részletezze!

10. Egy számtani sorozat első és ötödik tagjának összege 60. Mennyi a sorozat első öt tagjának összege? Válaszát indokolja!

11. Egy mértani sorozat második tagja 12, harmadik tagja 9. Mekkora az első 150 tag összege?

12. Iktasson be a 6 és az 1623 közé két számot úgy, hogy azok a megadottakkal együtt egy számtani sorozat szomszédos tagjai legyenek!

13. Angéla a pihenőkertjük egy részére járólapokat fektetett le. Az első sorba 8 járólap került, minden további sorba kettővel több, mint az azt megelőzőbe. Összesen 858 járólapot használt fel. Hány sort rakott le Angéla?
14. Egy növekedő számtani sorozat első három tagjának összege 60. Az első tagot 64-gyel növelve, a másik két tagot változatlanul hagyva, egy mértani sorozat első három tagjához jutunk. Mennyi a két sorozat első három tagja?
15. Egy derékszögű háromszög oldalainak mérőszámai egy mértani sorozat három szomszédos tagja. Mekkora a háromszög oldalai?
16. Nyelvtudásomat új szavak megtanulásával fejleszttem. Az első napon, hétfőn nyolc új szót tanulok, a hét további napjain, péntekig naponként hárommal többet, mint az előző napon. A szombat és a vasárnap az ellenőrzés, a felmérés napja,- ekkor veszem észre, hogy sajnos a szavak ötödét elfelejtem.
- a) Hány új szót tudok egy hét elteltével?
- A következő hétfőn már kilenc szót tanulok, majd az azt követő hétfőn tíz szót, és így tovább. Egy héten belül naponként szintén hárommal növelem a megtanulandó szavak számát öt napig, majd hétvégén ugyanúgy elfelejtem a héten tanultak ötödét. Az eljárást negyedéven keresztül ismétlem. (Vegyük a negyedévet 13 hétnek.)
- b) A megtanult (és nem elfelejtett) szavak számát hetenként felírom. Milyen sorozatot alkot az így felírt 13 szám?
- c) Hány új szót jegyzek meg a 13. héten?
- d) Hány új szót jegyzek meg ez alatt a negyedév alatt?
17. Egy mértani sorozat első három tagjának összege 52. Ha az első taghoz kettőt, a másodikhoz tízet, a harmadikhoz pedig kettőt adunk, akkor egy számtani sorozat egymást követő tagjait kapjuk. Adjuk meg a mértani sorozat első tagját és hányadosát!
18. Péter nagypapája minden évben félretett némi pénzösszeget egy perselybe unokája számára. 5000 Ft-tal kezdte a takarékoskodást 1996. január 1-én. Ezután minden év első napján hozzátett az addig összegyűlt összeghez, mégpedig az előző évben félretettnél 1000 Ft-tal többet. 2004. január 1-jén a nagypapa bele tette a perselybe a megfelelő összeget, majd úgy döntött, hogy a perselyt unokájának most adja át.
- a) Mekkora összeget kapott Péter?
- b) Péter nagypapája ajándékából vett néhány apróságot, de elhatározta, hogy a kapott összeg nagyobb részét 2005. január 1-jén bankszámlára teszi. Be is tett 60000 Ft-ot évi 4%-os kamatos kamatra (a kamatok minden évben, év végén hozzáadódnak a tőkéhez). Legalább hány évig kell Péternek várnia, hogy a számláján legalább 100000 Ft legyen úgy, hogy közben nem fizet be erre a számlára?

19. Egy autó ára újonnan 2 millió 152 ezer forint, a megvásárlása után öt évvel ennek az autónak az értéke 900 ezer forint.
- a) A megvásárolt autó tulajdonosának a vezetési biztonságát a vásárláskor 90 ponttal jellemezhetjük. Ez a vezetési biztonság évente az előző évinek 6 %-ával nő. Hány pontos lesz 5 év elteltével az autótulajdonos vezetési biztonsága? Válaszát egész pontra kerekítve adja meg!
- b) Az első öt év során ennek az autónak az értéke minden évben az előző évi értékének ugyanannyi százalékkal csökken. Hány százalék ez az éves csökkenés? Válaszát egész százalékra kerekítve adja meg!
20. Állítsuk a pozitív egész számokat növekvő sorrendbe, majd bontsuk rendre 1-gyel növekvő elemszámú csoportokra, a felbontást az alábbi módon kezdve: (1), (2; 3), (4; 5; 6), (7; 8; 9; 10), ...
- a) A 100-adik csoportnak melyik szám az első eleme?
- b) Az 1851 hányadik csoport hányadik eleme?
21. A határérték definíciója alapján igazold, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+2} = 2$ és $\varepsilon = \frac{1}{100}$ -hoz add meg a küszöbszámot!

22. Vizsgáld meg monotonitás és korlátosság szempontjából a következő sorozatokat:

$$a_n = \frac{5n-1}{3n-1} \quad a_n = \frac{2n+7}{8n-3} \quad a_n = \frac{2n-7}{8n-3}$$

23. Add meg az előző sorozatok határértékét, és $\varepsilon = \frac{1}{100}$ -hoz a küszöbszámot!

24. Add meg a következő sorozatok határértékét!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3-4}{5n^3-2n^2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2-2}{3n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3-12n^2+5}{-8n^4+13n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^7+8n^4-3n}{11n^6+15n^4+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3-12n^2+5}{-8n^3+13n-2} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{5n+1} - \sqrt{5n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n-1} - \sqrt{n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3n-1} - \sqrt{3n} =$$

Feladatok teljes indukcióra

1. Igazold, hogy az első n pozitív egész szám négyzetének összege:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Igazold, hogy a páratlan pozitív egészek négyzetének összege:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

3. Igazold, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ -ra igazak az alábbi összefüggések!

a) $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

c) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 \cdot 6 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

4. Bizonyíts be, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ -ra igazak az alábbi összefüggések!

a) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$

b) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

5. Mutasd meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ -ra

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

6. Igazold az alábbi állításokat!

a) 57 osztója a $7^n + 7^{n+1} + 7^{n+2}$ összegnek!

b) 64 osztója a $3^{2n+2} - 8n - 9$ összegnek!

c) 11 osztója a $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ összegnek!

Trigonometria

1. Hozd a lehető legegyszerűbb alakra! (A levezetést is kérem!)

a) $\cos 2x + 2 \cdot \sin^2 x =$

b) $\frac{2 \cdot (\sin x + \sin^2 x)}{\sin 2x} =$

c) $\frac{\cos 3\alpha - \cos \alpha}{2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha} =$

2. Igazold, hogy az egyenlőség fennáll, minden olyan valós számra, amelyre a kifejezés értelmezhető!

$$\sin 2x - \operatorname{tg} x = \cos 2x \cdot \operatorname{tg} x$$

3. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\sin 2x = \operatorname{tg} x$

c) $(\sin x - \cos x)^2 = 2 \cdot \sin 2x$

b) $3 \cdot (1 - \sin x) = 1 + \cos 2x$

d) $\sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x = \sqrt{3}$

4. Egy háromszög szögei egy számtani sorozat egymást követő elemei. Mekkora a szögei, ha szinuszaik összege $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$?

5. Egy háromszög legnagyobb oldalával szemközt fekvő szög kétszer akkora, mint a legkisebb oldallal szemközt fekvő. A háromszög oldalai egymás után következő egész számok. Határozd meg a háromszög oldalait és szögeit!

6. Egy szimmetrikus trapéz alapjai 30 cm, illetve 20 cm-esek. A hosszabbik alapjának egyik végpontjából a rövidebbik alap $26^\circ 34'$ -es szögben látszik. Mekkora a trapéz területe?

7. Elindul egy lovaskocsi, és $2 \frac{m}{s^2}$ gyorsulással halad egy egyenes úton. Erre az útra merőleges útról, a mezőn átvágva $5 \frac{m}{s}$ egyenletes sebességgel egy ember szalad a kocsi felé. Hogyan válassza meg az indulási irányát, hogy fel tudjon ugrani a szekérre, ha az indulás pillanatában 10 m-re van a kocsitól?

8. Igazold, hogy

$$\frac{\cos 5\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin 5\alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos 6\alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}, \text{ ha } \alpha \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$$

9. Egy háromszög oldalai egy 1 differenciájú számtani sorozatot alkotnak. A háromszög legnagyobb szöge kétszerese a legkisebbnek. Mekkora a háromszög szögei és oldalai?

10. Egy háromszög szögeire fennáll a $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \sin \gamma$ összefüggés. Mit mondhatunk a háromszögről?

11. Oldd meg az egyenleteket!

a) $\sin(x + 30^\circ) + \cos(x + 60^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $5\sin^2 x + \cos^2 x = 4 \cdot \cos 2x$

c) $\sin 30^\circ \cos x + \cos 30^\circ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x = 1$

e) $4\cos x - 2\sin x = 3$

f) $\sin x + \cos x = 1$

g) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$

h) $3\sin^2 \frac{x}{2} + 2\cos x + 2\sin \frac{x}{2} = 3$

i) $\sin x + \sin 3x = 4 \cdot \cos^3 x$

12. Egy háromszög oldalainak hossza 2 cm, 4 cm és 3 cm. Határozd meg a legrövidebb oldalhoz tartozó súlyvonal hosszát!

13. Határozd meg A és B pontok távolságát! Egy C pontból ezt a távolságot 30° -os szög alatt látjuk. A szög felezőjén 100 m-t közelítve a megméréndő távolsághoz, egy olyan D pontba jutunk, ahonnan az A pontba mutató irány 120° -os, a B pontba mutató pedig 90° -os szöget zár be az általunk megtett úttal. Mekkora az AB távolság?

14. Egy 122 cm hosszú kötel két végét egymástól 76 cm távolságban levő pontokban rögzítjük. Ezután úgy feszítjük meg egy közbülső pontjában, hogy a kötel két szára 64° -os szöget zár be. Mekkora a két kötélrész hossza?

15. Egy négyszög oldalaira $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ teljesül. Mekkora szöget zárnak be az átlói?

16. Egy háromszög oldalai 4 cm, 5 cm és 6 cm hosszúak. Mekkora a súlyvonalai?

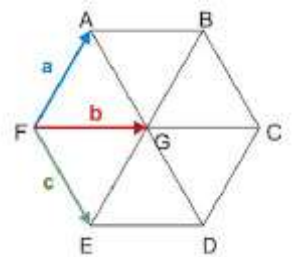
17. Egy kikötőből 100° -ban eltérő irányban egyszerre indul két hajó. Az egyik sebessége 50 km/h, a másiké 60 km/h. Milyen messze lesznek egymástól 5 óra múlva?

18. Egy háromszög szögei úgy aránylanak egymáshoz, mint $2 : 7 : 9$. Mekkora az oldalai, ha $a = 50$ cm?
19. Egy háromszög 4 cm-es oldalával szemben levő szög 40° -os, az oldalhoz tartozó súlyvonal 5 cm. Mekkora a másik két oldal hossza?
20. Ábrázold és jellemezd a következő függvényeket!
- a) $x \mapsto \sin x + 1$ b) $x \mapsto \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ c) $x \mapsto 2 \cdot \sin x + 1$
21. Ábrázold és jellemezd az $x \mapsto 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ függvényt!
22. Ábrázold és jellemezd a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \frac{1}{2} - \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ függvényt!

Vektorok, koordinátagéometria

1. Az ábrán egy szabályos hatszöget látsz, melyben az \underline{a} , \underline{b} , és \underline{c} vektorokat megjelöltem. Írd fel a megjelölt vektorok segítségével következőket!

- a) $\overrightarrow{DC} =$ c) $\overrightarrow{AD} =$ e) $\overrightarrow{BE} =$
 b) $\overrightarrow{FC} =$ d) $\overrightarrow{CB} =$



2. Legyen az $\vec{a}(3; 5)$, $\vec{b}(-4; 2)$ és $\vec{c}(-2; -5)$. Számítsd ki a következő vektorok koordinátáit!
- a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $\vec{a} - \vec{c}$ c) $\vec{a} - 2\vec{b}$ d) $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$
3. Két vektor hosszúsága 3 ill. 4 egység, az általuk bezárt szög 60° . Számítsd ki a skaláris szorzatukat!
4. Egy paralelogramma három csúcsának a koordinátái: A (1;7), B (-3;5) és C (5;9). Határozd meg a negyedik csúcs koordinátáit! (Három megoldás van!)
5. Adottak az $\underline{a}(8;11)$ és $\underline{b}(-4;-15)$ vektorok. Adj meg olyan vektort, amelyik
- a.) Párhuzamos az \underline{a} és \underline{b} vektorok összegével, de attól különböző! $\underline{v}(\ ; \)$
 b.) Merőleges az \underline{a} és \underline{b} vektorok különbségére! $\underline{w}(\ ; \)$
6. Egy háromszög csúcsai A (2; 0), B (5; 4), C (-1; 2).
- a) Add meg a súlypontjának a koordinátáit!
 b) Számold ki a területét!
 c) Mekkora az A csúcsnál lévő szöge?
7. Egy rombusz hosszabbik átlója kétszerese a rövidebbik átlójának. A rövidebbik átló végpontjainak koordinátái (-3; 7) és (5; 11). Határozd meg a másik két csúcs koordinátáit!

8. Egy háromszög három oldalfelező pontjának koordinátái $F_{AB}(2;3)$, $F_{AC}(6;0)$ és $F_{BC}(4;6)$.
- a.) Határozd meg a háromszög csúcsainak koordinátáit:
 $A(;)$ $B(;)$ $C(;)$
- b.) Határozd meg az a oldal hosszát!
9. Bizonyítsd be vektorok segítségével, hogy a trapéz középvonala párhuzamos az alapokkal, és hossza a két alap összegének a fele! (A trapéz középvonala a szárak felezőpontjait összekötő szakasz.)
10. Az ABC háromszög A és B csúcsának koordinátái $A(7;-2)$, $B(-3;8)$, \overrightarrow{AC} oldalvektorának koordinátái: $\overrightarrow{AC}(-7;4)$.
- a.) Határozd meg a C csúcs koordinátáit!
- b.) Mekkora a háromszög β szöge?
- c.) Határozd meg a háromszög s_a súlyvonal vektorának koordinátáit!
- d.) Határozd meg a háromszög területét!
11. Az $A(4;6)$ és $B(-2;-5)$ pontok által meghatározott szakaszt oszd fel 5:2 arányban!
12. Add meg a D pont koordinátáit úgy hogy az $ABCD$ pontok ebben a sorrendben egy paralelogramma 4 csúcsát határozzák meg, ha másik három csúcs koordinátái:
 $A(-2;1)$, $B(4;2)$ és $C(3;1)$. $D(;)$
13. Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek
- a) irányvektora $\vec{v}(2; -5)$, és áthalad a $P(3; -1)$ pontot!
- b) normálvektora $\vec{n}(4; -3)$ és egy pontja a $P(-2; 5)$ pont.
- c) áthalad a $P_1(-2; 3)$ és $P_2(4; -5)$ pontokon!
- d) irányszöge 60° , és egy pontja $A(4;0)$
- e) egy pontja $P(-2; 3)$ és meredeksége -2
- f) két pontja $A(-4; -2)$ és $B(5; 6)$
- g) Számítsd ki a fenti egyeneseknek a tengelyekkel közös pontjaik koordinátáit.
- h) Ábrázold a fenti egyeneseket koordinátarendszerben!
14. Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az origón és illeszkedik az $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$ koordinátájú pontra!
15. Mi az egyenlete annak az egyenesnek, amely
- a) áthalad az $(1; 3)$ ponton és normálvektora $(2; -1)$?
- b) áthalad a $(3; -2)$ ponton és irányvektora $(-4; 1)$?
- c) áthalad a $(2; 3)$ és $(-1; -4)$ pontokon?
- Ábrázold a fenti egyeneseket!

16. Állapítsd meg, hogy rajta van-e a $2x - y = 3$ egyenesen az $(1; 1)$ pont!
17. Mely pontokban metszi a koordináta-rendszer tengelyeit az $x - 5y = -10$ egyenletű egyenes? Ábrázold az egyenest!
18. Adj meg 2 pontot, amelyek illeszkednek a $-x + 3y = 5$ egyenesre!
19. Ábrázold az egyeneseket, és számítsd ki a két egyenes metszéspontjának koordinátáit!
 a: $2x - 3y - 12 = 0$
 b: $5x + 4y - 7 = 0$
20. Egy háromszög oldalegyeneseseinek egyenlete:
 a: $9x - 6y + 54 = 0$
 b: $x + 4y - 8 = 0$
 c: $11x + 2y - 46 = 0$.
 Számítsd ki a területét!
21. Számítsd ki a $P(-3; 1)$ pont és az $e: 3x + 5y - 15 = 0$ egyenes távolságát!
22. Írd fel a $P(-2; 5)$ és $Q(6; 7)$ pontok által meghatározott szakasz felező merőlegesének egyenletét!
23. Számítsd ki a $P(-1; 3)$ pont és a $4x - 3y = 12$ egyenletű egyenes távolságát!
24. Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái $A(-2; 0)$, $B(3; 3)$ és $C(-2; 4)$. Hol metszi a C csúcsból induló magasságvonal a koordináta tengelyeket?
25. Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái $A(-1; 4)$, $B(-3; -2)$ és $C(2; 1)$. Mekkora darabokat vág le a C csúcsból induló súlyvonal a koordinátatengelyekből?
26. Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái $A(-3; 1)$, $B(3; -1)$ és $C(2; 3)$. Írja fel a súlyvonalak egyenletét, és határozza meg a súlyvonalak közös pontját!
27. Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái $(4; 0)$, $(-3; -1)$ és $(-5; 6)$. Írd fel az oldalfélező merőlegesek egyenletét, és határozd meg a merőlegesek közös pontját!
28. a) Add meg az $e: 3x - 7y = 1$ egyenes egy normálvektorát, egy irányvektorát és a meredekségét!
 b) Számold ki annak a pontnak a második koordinátáját, melynek első koordinátája 7, és rajta van az e egyenesen!
 c) Rajta van-e az $A(-33; 12)$ pont az e egyenesen?
29. Ábrázold az egyeneseket koordinátarendszerben!
 a: $4x + 3y - 12 = 0$ b: $y = 2x + 3$ c: $3x - 5y - 15 = 0$
 d: $y = -\frac{2}{3}x + 1$ e: $x + 2y + 4 = 0$ f: $y = -x - 2$

30. Egy háromszög három csúcsának koordinátái: $A(7; 1)$, $B(-2; 8)$, $C(1; -5)$. Írd fel az A csúcsból induló súlyvonal és az a oldalhoz tartozó középvonal egyenletét!
31. Egy derékszögű háromszög átfogójának egyik végpontja $A(-2,2)$, a másik pontja a B pont, melynek ordinátája 4. Az egyik befogó egyenlete $x+y=10$. Számítsd ki az átfogóhoz tartozó magasság hosszát és a háromszög területét!
32. A háromszög csúcsinak koordinátái $A(-5;0)$ $B(1;0)$ $C(-1;4)$. Milyen arányban osztja az a oldallal párhuzamos középvonalat az A csúcshoz tartozó magasságvonal?
33. Egy háromszögben az AB oldal egyenesének egyenlete $x+5y=18$. Az A csúcsból induló magasságvonal egyenlete $y=3$, a B csúcsból induló magasságvonalé pedig $5x+3y=2$. Számítsd ki a háromszög területét!

Vegyes feladatsor

1. (2003./1.) Adott két egyenes egyenlete:

$$e: \quad 3x - y = 2$$

$$f: \quad x + 3y = -6$$

- a) Határozza meg az egyenesek metszéspontjának koordinátáit!
- b) Számítsa ki a két egyenes hajlásszögét!
- c) Mekkora távolságra van az origó az e egyenestől?
2. (2003./4.) Egy repülőgépnek 2400 km utat kellett megtennie. Az út első harmadában a rossz időjárási viszonyok miatt az eredetileg tervezett sebességét 25%-kal csökkentette.
- a) Az eredetileg tervezetthez képest hány százalékkal kellene növelnie a sebességét az út hátralevő részében, ha késés nélkül szeretne leszállni?
- b) Sajnos az időjárás nem javult lényegesen, így a gép az út második részében az *eredetileg tervezett sebességénél* $160 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -val kisebb sebességgel tudott haladni. Mekkora volt az eredetileg tervezett átlagsebessége és menetideje, ha így egy óra késéssel érkezett a célállomásra?

3. (2003./5.) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számpárok halmazán:

$$16x^2 - (8\cos y)x + 1 = 0$$

4. (2003./8.) Legyen adott a valós számok halmazán értelmezett

$$f(x) = |x| + |x - 4| \quad \text{és} \quad g(x) = -\frac{2}{7}x + 10 \quad \text{függvény.}$$

- a) Mely x értékek esetén teljesül, hogy $f(x) = g(x)$?
- b) Értelmezzük a h függvényt a $[-5; 10]$ intervallumon a következőképpen:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } f(x) \geq g(x) \\ g(x), & \text{ha } g(x) \geq f(x) \end{cases}$$

Ábrázolja az f , a g és a h függvényeket a $[-5; 10]$ intervallumon, közös koordinátarendszerben!

5. (2003./9.) Egy vízszintes egyenes úton haladunk. Az út bal oldalán, a hegy tetején egy kilátót veszünk észre. Ennek a kilátónak a tetejét az útról 30° -os emelkedési szögben látjuk. Fél km-t továbbhaladva az emelkedési szög már 45° -os. Újabb 500 méter megtétele után már 60° -os az emelkedési szög. Milyen magasan van az úthoz képest a kilátó teteje? Készítsen ábrát is!
6. (2004./1.) Oldja meg grafikus módszerrel az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$3^x < 2\sqrt{x} + 1$$

7. (2004./5.) Oldja meg a valós számok halmazán a $\log_{3x}3 + 4 \cdot \log_{9x}3 = 6$ egyenletet!
8. (2004./6.) Az ABC háromszögben adott két oldal és a közbezárt szög: $b = 4$; $c = 5$; $\alpha = 32^\circ$.
- Mekkora a háromszög legnagyobb szöge?
 - Milyen messze van a háromszög magasságpontja a legnagyobb oldaltól?
9. (2005.okt./5.) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$\left. \begin{aligned} \log_x(x^2y^3) + \log_y(x^3y) &= 9 \\ \cos(x+y) + \cos(x-y) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

10. (2005.máj./1.) Az ABC háromszög oldalegyeneseinek egyenlete:

$$AB: y = 0$$

$$BC: x + 10y = 20$$

$$CA: y = \frac{1}{2}x - 4$$

- Számítsa ki a háromszög csúcspontjainak koordinátáit!
 - Számítsa ki a háromszög B csúcsánál lévő belső szöget!
11. (2005.máj./3.) Egy növekedő számtani sorozat első három tagjának összege 60. Az első tagot 64-gyel növelve, a másik két tagot változatlanul hagyva, egy mértani sorozat első három tagjához jutunk. Mennyi a két sorozat első három tagja?
12. (2005.máj./6.) Tekintsük a valós számokon értelmezett $f(x) = (p - 3,5)x^2 + 2(p - 2)x + 6$ függvényt, ahol p tetszőleges valós paraméter!
- Mutassa meg, hogy tetszőleges p érték mellett az $x = -2$ zérushelye a függvénynek!
 - Milyen p értékek esetén lesz a függvény másik zérushelye 1-nél nagyobb?
13. (2005.máj./7.) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$\sqrt{\sin^2x - 4\sin x + 4} + \sqrt{\sin^2x + 4\sin x + 4} = \sqrt{\sin^2x + 7\sin x + 12,25}$$