Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2007/2008-as tanév
3. (döntő) forduló
haladók II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Induljunk ki egy tetszőleges 2008 jegyű számból, és képezzünk az alábbi szabály szerint egy egészekből álló számsorozatot. A sorozat következő tagját az előzőből úgy kapjuk, hogy annak számjegyei összegét x-szel jelölve kiszámoljuk az $\dfrac{x(x-1)}{2}$ kifejezés értékét.

Bizonyítsuk be, hogy akármilyen 2008-jegyű egész számból indulunk is ki, a kapott sorozat 2007. és 2008. tagja egyenlő.

Megoldás. Első tag: 2008-jegyű.

2. tag: maximum $\dfrac{2008\cdot 9\cdot(2008\cdot 9-1)}{2} < 10\,000\cdot 20\,000 = 200\,000\,000.$

3. tag: maximum $\dfrac{(2+8\cdot 9)(2+8\cdot 9-1)}{2} < 5000.$

4. tag: maximum $\dfrac{31\cdot 30}{2} < 500.$

5. tag: maximum 231, aminek számjegyeinek összege bármi lehet 1 és 19 között, amiből minden esetben kiszámoljuk, hogy mi lehet a 6. tag, és innentől kezdve mi lehet a sorozat. 3 pont

számjegyösszeg	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10
6. tag	171	153	136	120	105	91	78	66	55	45
sorozat	36	36	45	3	15	45	105	66	45	36
folytatás	36	$\vdots$	36	3	15	36	15	$\vdots$	36	$\vdots$
	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

számjegyösszeg	9	8	7	6	5	4	3	2	1
6. tag	36	28	21	15	10	6	3	1	0
folytatás	36	45	3	15	0	15	3	0	0
	$\vdots$	36	$\vdots$	$\vdots$	0	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		$\vdots$			$\vdots$				

3 pont

Ebből látszik, hogy minden esetben egy idő után (biztosan a 2007. sorozatelem előtt) stabilizálódik a sorozat, vagyis a 2007. és 2008. elem biztosan megegyezik. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Egy négyzet alakú asztal négy lába 1 méter hosszú. Mindegyik lábból levághatunk egy egész deciméternyi darabot. Az is lehet, hogy semmit nem vágunk, és az egész lábat is levághatjuk. A vágások hosszát egy rendezett (v_1, v_2, v_3, v_4) négyessel írhatjuk le, a lábakat megkülönböztetjük.

Hányféle (v_1, v_2, v_3, v_4) vágásra teljesül, hogy a megmaradt asztal nem billeg?

Az asztal akkor nem billeg, ha elhelyezhető a vízszintes talajon úgy, hogy mind a négy láb leér a földre.

Megoldás. Azt kell megadnunk, hogy milyen vágások esetén lesz a négy láb végpontja egy síkban. 1 pont

A vágás utáni hosszúságokat (deciméterben) jelölje L_1, L_2, L_3, L_4 ($0 \leqq L_i \leqq 10$).

A lábak végpontjai legyenek P_1, P_2, P_3, P_4, az asztallaphoz közelebbi végpontjuk pedig Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, ebben a sorrendben. A négy pont pontosan akkor van egy síkban, ha P_1P_3 és P_2P_4 metszi egymást. 1 pont

Ez a metszéspont csak a $[P_1Q_1Q_3P_3]$ és a $[P_2Q_2Q_4P_4]$ síkok metszésvonalán lehet. Ez a metszésvonal a $P_1Q_1Q_3P_3$ és a $P_2Q_2Q_4P_4$ trapézok közös középvonalával esik egybe.

Tehát ha P_1P_3 és P_2P_4 metszik egymást, akkor felezőpontjukban találkoznak. 1 pont

A kölcsönös felezés akkor következik be, ha a két trapéz alapokkal párhuzamos középvonala azonos hosszúságú.

A hosszúságra a következő feltételt kaptuk:

$$\frac{L_1 + L_3}{2} = \frac{L_2 + L_4}{2}.$$

Ennek az egyenletnek keressük az egész megoldásait ($0 \leqq L_i \leqq 10$).

Jelölje M_k az $L_1 + L_3 = k$ egyenlet megoldásainak számát a fenti feltételek mellett. Ha M_k-t meghatározzuk, akkor az eredeti feladat kérdésére is megkapjuk a választ, a jó vágások száma:

$$\sum_{k=0}^{20} M_k^2,$$

hiszen minden 0 és 20 közötti k egészre, egymástól függetlenül adhatjuk meg az $L_1 + L_3 = k$ és az $L_2 + L_4 = k$ megoldásait. 2 pont

Végül $M_k = k + 1$, ha $0 \leqq k \leqq 10$, és $M_k = 20 - k + 1$, ha $11 \leqq k \leqq 20$, hiszen az elő esetben a megoldások: $(0, k)$, $(1, k-1)$, $\ldots$, $(k, 0)$, a másodikban pedig $(k-10, 10)$, $(k-9, 9)$, $\ldots$, $(10, k-10)$. 2 pont

Tehát a jó vágások száma:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + 10^2 + 11^2 + 10^2 + \ldots + 2^2 + 1^2 = 891.$$

Ez utóbbi eredmény kiszámolható „kézzel", vagy a négyzetszámok összegére vonatkozó képlettel.

$$11^2 + 2 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 121 + 2 \cdot 5 \cdot 77 = 891.$$

Összesen: 7 pont

3. Az n természetes számot *bájosnak* nevezzük, ha összetett, és egynél nagyobb osztói felírhatók egy kör kerületére úgy, hogy a szomszédos számok nem relatív prímek.

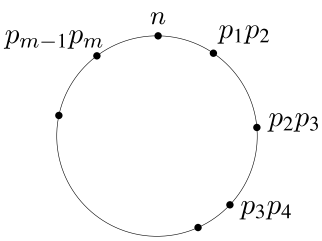
Hány *bájos* szám van az $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ halmazban?

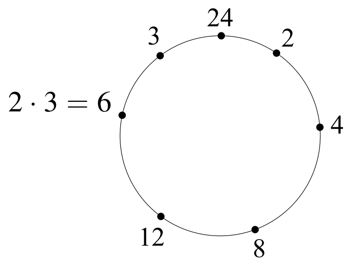
Megoldás. Ha $n = p \cdot q$, ahol p és q különböző prímek, akkor három osztót kellene felírni a körre: p, q és pq, ami nyilván lehetetlen, hiszen $(p, q) = 1$, és ez a két osztó biztosan egymás mellé kerül. 1 pont

Bebizonyítjuk, hogy minden más összetett szám bájos. 1 pont

Ha $n = p^k$ ($k \geqq 2$ egész), akkor az osztók: $p, p^2, \ldots, p^k$, ebben az esetben bármelyik felírás jó, nincsenek relatív prímek az osztók között. 1 pont

Tegyük fel, hogy $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$, ahol $m \geqq 3$, vagy $m = 2$ és $\max(k_1, k_2) > 1$. Ekkor induljunk ki a következő elrendezésből:





Feltételeink szerint $n \neq p_1p_2$, tehát legalább két osztót felírtunk a kör kerületére. Ezután az n és p_1p_2 közötti ívre tetszőleges sorrendben felírhatjuk azokat az osztókat, amelyek legkisebb prímosztója p_1. A p_1p_2 és p_2p_3 közötti ívre azok az osztók kerülnek, amelyek legkisebb prímosztója p_2. Így haladva előbb-utóbb minden (1-nél nagyobb) osztó felkerül a körre. Utoljára $p_{m-1}p_m$ és n közé a $p_m, p_m^2, \ldots, p_m^{k_m}$ számok kerülnek. 2 pont

Végül megszámoljuk, hány olyan összetett szám van 100-ig, amely nem két prím szorzata. Ezek a következők: 4, 8, 9, 12, 16, 18, 20, 24, 25, 27, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 44, 45, 48, 49, 50, 52, 54, 56, 60, 63, 64, 66, 68, 70, 72, 75, 76, 78, 80, 81, 84, 88, 90, 92, 96, 98, 99, 100.

Összesen 44 szám. 2 pont

Összesen: 7 pont