Kiss Árpád
Országos Közoktatási
Szolgáltató Intézmény

Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2003–2004-es tanév
első (iskolai) forduló
haladók – I. kategória

Feladatok

1. Az első n pozitív egész szám összege egy olyan háromjegyű szám, amelynek minden jegye egyenlő. Mekkora n értéke?

2. Mekkora az oldalak aránya abban az egyenlő szárú háromszögben, amelyben az alap egyik csúcsán átmenő egyenes felezi a háromszög kerületét és a háromszög alaphoz tartozó magasságát is?

3. Hány darab pozitív egészekből álló $(k;n)$ számpárra igaz, hogy $\sqrt{n+k}+\sqrt{n-k}>k$ és $k^2+n^2<100$?

4. Az $x^2+x+p=0$ egyenlet két különböző valós gyöke x_1 és x_2, ahol p pozitív valós paraméter.

Bizonyítsuk be, hogy $\dfrac{x_1^3+x_2^3}{x_1^4+x_2^4}$ nagyobb (-2)-nél, de kisebb (-1)-nél.

5. Egy osztályba 20 diák jár. Tudjuk, hogy bármely két diáknak van közös nagyapja. (Minden diáknak két nagyapja van.) Bizonyítsuk be, hogy van köztük 14 olyan tanuló, akiknek közös nagyapja van!

Kiss Árpád
Országos Közoktatási
Szolgáltató Intézmény

Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2003–2004-es tanév

első (iskolai) forduló

haladók – II. kategória
(nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók)

Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy

a) $2003^{2004} + 2004^{2003}$ nem prímszám,

b) $2003^{2004} - 2004^{2003}$ nem négyzetszám.

2. Egy egyenlő szárú háromszög alapjának egyik csúcsán átmenő egyenes felezi a háromszög kerületét és a háromszög alaphoz tartozó magasságát is. Milyen arányban osztja a háromszög alaphoz tartozó magassága a kerületet felező egyenes háromszögbe eső szakaszát?

3. Bizonyítsuk be, hogy ha az $x^2 + px + q = 0$ egyenletnek két olyan valós gyöke van, amelyek közül az egyik a $[0; 1]$ intervallum belsejébe, a másik pedig az intervallumon kívül van (ahol p és q valós paraméter), akkor az

$$(1 + p + q)x^2 + (1 + 2p + 3q)x + 2q = 0$$

egyenletnek pontosan egy pozitív gyöke van.

4. Legyen a, b, c és d négy pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy

$$[(a; c); (b; d)] \leqslant ([a; b]; [c; d]),$$

ahol $(x; y)$ – a szokásos módon – az x és y egészek legnagyobb közös osztóját, $[x; y]$ pedig a legkisebb közös többszörösét jelöli.

5. Egy osztályba 20 diák jár. Tudjuk, hogy bármely két diáknak van közös nagyapja. (Minden diáknak két nagyapja van.) Bizonyítsuk be, hogy van köztük 14 olyan tanuló, akiknek közös nagyapja van!

Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny, 2003–2004-es tanév

MATEMATIKA, III. kategória

Az első (iskolai) forduló feladatai

a gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói részére

1. Legyen a, b pozitív valós, n pozitív egész. Bizonyítsuk be, hogy

$$\lg(a^n) + \binom{n}{1}\lg(a^{n-1}b) + \binom{n}{2}\lg(a^{n-2}b^2) + \ldots + \lg(b^n) = \lg\left((ab)^{n2^{n-1}}\right).$$

2. Álljon a H halmaz véges sok olyan természetes számból, amelyeknek nincs 3-nál nagyobb prímosztója. Mutassuk meg, hogy a H-beli számok reciprokainak az összege 3-nál kisebb.

3. Tekintsük egy kör három pontja által meghatározott három diszjunkt körívet. Mindegyik ív felezőpontja körül megrajzoljuk a végpontjain áthaladó kört. Bizonyítsuk be, hogy a kapott három kör egy ponton halad át.

4. Egy földszintes elvarázsolt kastély négyzet alakú, és 2003×2003 egyforma, négyzet alakú szobára oszlik. Oldalszomszédos szobák között ajtók lehetnek. A kapubejárat az északnyugati sarokszobába vezet. A kastélyba belépve bolyongtunk egy darabig, és amikor először visszaértünk az északnyugati sarokszobába, akkor kimentünk a kastélyból. Kiderült, hogy utunk során a délkeleti (és az északnyugati) sarokszoba kivételével mindegyik szobába pontosan százszor léptünk be. Hányszor léptünk be a délkeleti sarokszobába?

5. Legyenek $a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ valós számok úgy, hogy $a_0 = a_{n+1} = 0$. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan k szám, $0 \leq k \leq n$, hogy
   (i) minden $i = 1, \ldots, n-k+1$-re $a_{k+1} + \ldots + a_{k+i} \geq 0$, és
   (ii) minden $j = 0, \ldots, k$-ra $a_j + \ldots + a_k \leq 0$.

Valamennyi feladat 7 pontot ér.