



A 2005-2006. tanévi matematika OKTV I. kategória első (iskolai) fordulójának feladatai

1. feladat **10 pont**

Melyek azok az a, b, c egész számok, amelyekre teljesül az alábbi egyenlőség?

$$a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = a + b + c + a \cdot b \cdot c$$

2. feladat **10 pont**

Oldja meg a valós számok halmazán az

$$x^4 - 3 \cdot x^3 + 3 \cdot x + 1 = 0$$

egyenletet!

3. feladat **10 pont**

Az ABC háromszög BC, CA és AB oldalain vegyük fel rendre a D, E, F pontokat úgy, hogy teljesüljön a

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = \frac{1}{3}$$

egyenlőség!

jelölje az ABC háromszög területét k , a DEF háromszög területét k_1 ! Bizonyítsa be,

$$\text{hogy } k_1 < \frac{3}{4} k !$$

4. feladat **10 pont**

Legyen az ABC háromszögben az A csúcsból húzott magasságvonal és a BC oldal metszéspontja D, A B pontból induló belső szögfelező és az AC oldal metszéspontja E. Mekkora az EDC szög nagysága, ha $\angle AEB = 45^\circ$?

5. feladat **10 pont**

Legfeljebb hány háromszög teljesíti az alábbi feltételek mindegyikét:

- tompaszögűek,
- oldalaik hossza centiméterben mérve egész szám,
- oldalaik hossza centiméterben mérve egy növekvő számtani sorozat három egymást követő tagja,
- közülük semelyik kettő nem egybevágó?

Fejezze ki a háromszögek számát a számtani sorozat különbségével!

6. feladat **10 pont**

A valós számok halmazán értelmezett másodfokú $f(x)$ függvény minden x számra eleget tesz a

$$3 \cdot f(x) + f(2 - x) = x^2$$

egyenlőségnek.

Hány olyan, 2005-nél nem nagyobb x természetes szám van, amelyre igaz, hogy

$$f(x) > \frac{13}{4} ?$$



OKÉV

Országos Közoktatási
Értékelési és Vizsgaközpont

GIMNÁZIUM

**Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
2005-2006. tanévi első fordulójának feladatai
matematikából, a II. kategória számára**

1. Két iskola tanulói műveltségi vetélkedőn vettek részt. A 100 pontos teszten az első iskola diákjainak átlag pontszáma 74, ebből a fiúké 71, a lányoké 76. A második iskolába járó diákok átlaga 84 pont, ebből a fiúké 81, a lányoké 90 pont volt. Az összes résztvevő fiú átlaga 79 pont. Mennyi az összes résztvevő lány átlaga? *7 pont*

2. (a) Ábrázolja az $[1, \infty)$ halmazon értelmezett következő függvényt:

$$x \mapsto \sqrt[4]{1 - 2x + x^2} - \sqrt{x - \sqrt{4x - 4}}$$

(b) Jellemezze a függvényt a következő tulajdonságok szerint:

zérushelyek, értékkészlet,
korlátosság, szélsőértékek,
növekedés-csökkenés, monotonitás.

7 pont

3. Egy kocka éleit megszámozták az 1, 2, ..., 12 számokkal. András kiválaszt két olyan számot, amelyekhez tartozó éleknek egy közös csúcsuk van. Ugyanezt teszi tőle függetlenül Béla is. Mekkora a valószínűsége, hogy az András által választott éleknek nincs közös pontja a Béla által választott éllel? *7 pont*

4. Az ABC hegyesszögű háromszög A, B, C csúcsaiból induló magasságok talppontjai rendre A_1, B_1, C_1 . A háromszög magasságpontja M , a BM szakasz felezőpontja F . A C_1F egyenes a BC oldalt Q -ban, az A_1B_1 egyenes a CC_1 -et S -ben metszi.

Bizonyítsuk be, hogy QS merőleges AC -re.

7 pont

5. Jelölje $f(n)$ azoknak az n jegyű pozitív egészeknek a számát, amelyekre igaz, hogy az n számjegy közt előfordul az 1-es és a 2-es számjegy is. Bizonyítsuk be, hogy $f(n)$ nem lehet négyzetszám, ha $n \geq 2$. *7 pont*