OKÉV
Országos Közoktatási Értékelési és Vizsgaközpont

SZAKKÖZÉPISKOLA

A 2006-2007. tanévi matematika OKTV I. kategória első (iskolai) fordulójának feladatai

1. Egy számtani sorozat három egymást követő tagjához rendre 3-at, 1-et, 3-at adva egy mértani sorozat egymást követő tagjait kapjuk, amelyek összege 13.
   Határozza meg a számtani sorozat első tagját és különbségét (differenciáját)!
2. Oldja meg az
   $$\left(x^2+6x\right)^2-36=\left(x+3\right)^2+27$$
   egyenletet a pozitív valós számok halmazán!
3. Az ABC háromszög oldalaira $AB \geq BC \geq AC$ teljesül. A C csúcsból induló magasság T talppontja negyedeli az AB oldalt. Az AB oldal F felezőpontjának a BC oldaltól mért távolsága az AB oldal hosszának negyede.
   Mekkorák a háromszög szögei?
4. A Kovács házaspárhoz a Szabó és a Pék házaspár vendégségbe érkezik. Vacsorához – mind a hatan –egy kerek asztal köré ültek.
   Mennyi a valószínűsége annak, hogy sem házaspár, sem két nő nem került egymás mellé?
   (Két ülésrendet akkor tekintünk különbözőnek, ha legalább egy embernek legalább az egyik szomszédja másik személy.)
5. Három egymást követő egész szám harmadik hatványának az összege milyen feltétel teljesülése esetén osztható 18-cal?
   Bizonyítsuk be, hogy a keresett feltétel esetén a fenti összeg 36-tal is osztható!
6. Frédi és Béni jó barátok. Rendszeresen együtt futnak, illetve gyalogolnak. Egy alkalommal az A és B települések közötti távot úgy teszik meg, hogy egyszerre indulva Frédi a táv első felében fut, a másik felében gyalogol, Béni pedig a mozgásidejének a felében fut és a másik felében gyalogol. Annyira összeszoktak már, hogy mind a futási, mind a gyalogos sebességük azonos a másikéval.
   Ki ér előbb A-ból B-be? (A futás sebesség nem kisebb a gyaloglás sebességénél.)

Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér.

Sikeres feladatmegoldást kíván a Versenybizottság!

Országos Közoktatási Értékelési és Vizsgaközpont

GIMNÁZIUM

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2006-2007. tanévi első fordulójának feladatai matematikából, a II. kategória számára

1. Melyek azok a pozitív egészek, amelyeknek pontosan négy pozitív osztójuk van és ezek összege 84?

2. Az a valós paraméterrel adott az alábbi egyenlet, jelölje az egyenlet valós gyökeit x_1 és x_2:

$$2x^2 - 3(a+2)x + 9a + 1 = 0.$$

(a) Határozzuk meg a értékét úgy, hogy az ${x_1}^2 + {x_2}^2$ kifejezés értéke minimális legyen.

(b) Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan valós a érték, amely esetén x_1 és x_2 is egész szám.

(c) Keressük meg az a paraméter olyan egész értékeit, melyek esetén az egyenletnek egyik gyöke egész.

3. Legyen n egynél nagyobb egész. Egy háromszög oldalainak mérőszámai:

$$a = 2^{n+2} - 2^{n+1} + 2^n, \qquad b = 2^{n+1} - 2^n + 2^{n-1}, \qquad c = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^{n-1}.$$

Mekkora a háromszög legnagyobb szögének tangense?

4. Egy táblára felírunk négy darab egymástól különböző pozitív egész számot. Először letörölünk kettőt, helyettük felírjuk a letörölt két szám mértani közepét. A táblán lévő három szám közül újra letörölünk kettőt, helyettük felírjuk a most letörölt két szám mértani közepét. Ezt követően a táblán levő két szám mértani közepe 2.

Mekkora lehetett az eredeti négy szám összege?

5. A hegyesszögű ABC háromszög AC oldalának mely P pontjára lesz a $PB^2 + PC^2$ összeg minimális?

Valamennyi feladat 7 pontot ér.